ORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III - 2º Parcial

Fecha examen: 01-DIC-2017 / Fecha notas: 06-DIC-2017

	Nº Orden	Apellido y nombre	L.U.	Cant. hojas[1]
pletar:	27	Singer Jessica	177/16	8
	Nota (Nº)	Nota (Letras)	Docente	
completar:	9,75	nueve con 75/100	—	

1. Sea G un grafo no necesariamente conexo de n vértices y m ejes. Diseñar un algoritmo eficiente que decida si G tiene un circuito euleriano. Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad. Justificar. El mejor algoritmo que conocemos tiene complejidad $O(m+n)$. 2 p.

2. Sea G un grafo de n vértices.
   (a) Demostrar que $\chi(G) + \nu(G^c) \leq n$, donde $\nu(\cdot)$ es la cantidad de ejes de una correspondencia máxima. 1 p.
   SUGERENCIA: Equivalentemente, $\chi(G) \leq \nu(G^c) + (n - 2\nu(G^c))$.
   (b) Demostrar que si G no es completo y U es el conjunto de vértices universales de G entonces $\chi(G) - |U| \leq \rho((G-U)^c)$, donde $\rho(\cdot)$ es la cantidad de ejes de un cubrimiento mínimo de vértices por aristas. 1 p.
   SUGERENCIA: Considerar primero el caso $U = \emptyset$.

3. Sea $G = (V, E)$ una red con capacidades en los arcos. Sean f_1 y f_2 dos flujos válidos en G. Sea $\alpha \in [0, 1]$. Definimos la función $f : E \to \mathbb{R}$ como $f(e) = \alpha f_1(e) + (1-\alpha) f_2(e)$.
   (a) Demostrar que f es un flujo válido en G. 1 p.
   (b) ¿Es cierto que si f_1 y f_2 son flujos máximos entonces f también lo es? En caso afirmativo demostrar; en caso negativo dar un contraejemplo y justificar. 1 p.

4. Demostrar que $\Pi_1 \in$ NP-completo mediante una reducción polinomial y usando que $\Pi_2 \in$ NP-completo. 2 p.

   Π_1: ÁRBOL GENERADOR ISOMORFO
   Entrada: grafo H; árbol T.
   Pregunta: ¿tiene H un árbol generador isomorfo a T?

   Π_2: CAMINO HAMILTONIANO
   Entrada: grafo G.
   Pregunta: ¿existe un camino que pasa exactamente una vez por cada vértice de G?

5. Dado un grafo G definimos G^3 como el grafo que se obtiene al tomar tres copias de G y agregar los tres ejes posibles entre las tres copias de cada vértice de G. Por ejemplo, $K_1^3 = K_3$ y K_2^3 es un prisma de base triangular.
   Sea G un grafo.
   (a) Demostrar que si G tiene ciclos simples entonces G^3 no es planar. 0.5 p.
   SUGERENCIA: Demostrar que C_k^3 no es planar.
   (b) Demostrar que si $\Delta(G) \geq 3$ entonces G^3 no es planar. 0.5 p.
   SUGERENCIA: Demostrar que $K_{1,3}^3$ no es planar.
   (c) Demostrar que P_k^3 es planar. 0.5 p.
   (d) Demostrar que G^3 es planar si y sólo si cada componente conexa de G es un camino simple. 0.5 p.

[1] Incluyendo a esta hoja. Entregar esta hoja junto al examen.

(2p)

Jessica Singer

27

1) sabemos que si G es conexo o tiene una única comp conexa con ejes, y todos los nodos tienen grado par, entonces tiene un circuito euleriano. Además, si G tiene dos c.c con ejes, necesariamente no va a tener circuito euleriano (pues el circuito tendría que recorrer ambas cc y por definición sabemos que no están conectadas).

Por lo tanto, G tiene una única c.c con aristas y todo vértice de G tiene gr par $\Leftrightarrow$ G es euleriano (ie tiene circuito euleriano)

Para el algoritmo represento el grafo con lista de ady primero tomo un vértice v con algún vecino (es decir con ListaAdy$(v) \neq \emptyset$) → esto toma $O(n)$ y ejecuto un BFS desde el mismo, marcando en un arreglo auxiliar de bool a los nodos a los que llego. Esto toma $O(n+m)$ y vimos que me da la cc de v (en particular podría darme las n conexas).

si no hay ninguno ⇒ no es Euleriano pues no hay circuito

inicializar lo es $O(n)$

Luego, me fijo que $\forall v \in V$ tq no llegué al mismo mediante el BFS, el mismo no tenga vecinos, es decir, sea aislado. Esto de nuevo toma $O(n)$ pues es recorrer el arreglo creado para el BFS y acceder a la posición de la lista de adyacencia (lo cual es $O(1)$ si lo implemento con std::vector en C++) y fijarme el tamaño de ListaAdy(v). Con esto chequeo que $\exists!$ cc con ejes.

Luego, si efectivamente hay 1 sola ~~cc~~ cc con ejes, ovq todos los nodos tienen gr par, y esto es simplemente recorrer la lista ady y chequear que $\#$(listaAdy(v)) $\in$ $\dot{(2)}$ $\forall v \in V$. El algoritmo tiene entonces complej $O(n+m)$.

El pseudocódigo del algoritmo es el siguiente:

```
EsEuleriano (listaAdy, n):   v ← Ø
    foreach w ← 1..n:
            if |ListaAdy(w)| > 0 :
               v ← w                          ] O(n)
    endfor
    if v ≠ Ø :          //si hay vértice no aislado

O(n+m) [  compconexa ← vector con 0s de menor n v  ] O(n)
          BFSMarcandoEnCompConexa(v);

O(n)  {   foreach w ← 1..n
              if compconexa[w] = 0
                   if w no es aislado  ] |listaady(w)| > 0
                      devolver no es euleriano
                   endif
              ELSE
                   if w no tiene grado par ( |ListaAdy(w)| = 0 (2))
                      devolver NO es euleriano
                   endif
              endif
          end for
    ELSE return no es euleriano
    endif
    devolver ES EULERIANO

end
```

Generar la lista ady también es O(n+m) (por las dudas)

El algoritmo chequea que haya 1 sola cc con ejes (o ninguna en ese caso no es euleriano porque no hay ningún circuito) y que en la misma todo vértice tenga gr par, lo cual sabemos que es cond nec. y suf. para que haya circ euler.

1.8

Jessica Singer 27

2a) $\chi(G) \leq \nu(G^c) + (n - \underbrace{2\nu(G^c)}_{\text{nodos que no están en el matching}})$

~~matching son aristas que no inciden sobre el mismo nodo. nodo de cada eje del~~

~~Al tomar un matching, tengo un cjto de vértices~~

Por cada eje del matching de G^c, es una arista en G^c y por lo tanto allí NO hay una arista en G. Considero el coloreo siguiente:

- Pinto ~~todos~~ los con $\nu(G^c)$ colores distintos, cada par de ejes del matching (es decir, para cada eje del matching pinto con el mismo color ambos extremos). Como ese eje no está en G^c, por ahora (no pinté todo) no se invalida el coloreo.

- Pinto cada vértice que NO esté en el matching de un color distinto. Como la cant de vértices que están en el matching son $2\nu(G^c)$, los que no están son $n - 2\nu(G^c)$.

Esto es un coloreo válido pues pinto todos los nodos y sólo pinté igual algunos de aquellos unidos en G^c (de a pares) por lo que no están unidos en G. $\Rightarrow$ tengo un coloreo válido de $\nu(G^c) + (n - 2\nu(G^c))$ colores $\Rightarrow \chi(G) \leq \nu(G^c) + (n - 2\nu(G^c)) \Rightarrow$

$\chi(G) + \nu(G^c) \leq n$ como quería ver.

no sería válido si hubiera 2 adys al mismo color pero mismo color $\Rightarrow$ son adys en $G^c \Rightarrow$ no son adys.

b) ~~Si $U = \emptyset$, tenemos $\chi(G) \leq p((G)^c)$ y ... mínimo de vértices ...~~ $\leq n - |M|$.

~~Si tenemos un cubrimiento~~ de vértices por ~~aristas~~

$$\chi(G) - |U| \leq p((G-U)^c)$$

$$\iff \chi(G) \leq p((G-U)^c) + |U|.$$

Notar que como los vértices de U son universales, a G lo puedo pensar como el grafo junta (práctica 10) de G−U y U (abusando de la notación: $H = U$ = grafo inducido de G por U).

Por un ej de la práctica 10, (→10.8) sabemos que $\chi((G-U)+U) = \chi(G) = \chi(G-U) + \chi(U)$.

Por la parte a), sabemos que $\chi(G-U) \leq \overbrace{n'}^{\text{nodos de } G-U = n-|U|} - \nu((G-U)^c)$ y por una prop vista en la teórica sabemos que este último es exactamente igual a $p((G-U)^c)$.

Por lo tanto $\chi(G-U) \leq p((G-U)^c)$.

$\chi(\text{"}U\text{"}) \leq |U|$ trivialmente pintamos cada vértice de un color distinto. (Además vale el = pues eran vértices univ ⇒ forman clique)

$\Rightarrow \chi(G) = \chi(G-U) + \chi(\text{"}U\text{"}) \leq p((G-U)^c) + |U|$

$\Rightarrow \chi(G) - |U| \leq p((G-U)^c)$ como quería probar.

falta justificar por qué existe recubrimiento en $(G-U)^c$ (no hay vértices aislados)

Jessica Singer

27

2p.

3) a) Para ver que f es un flujo ~~máximo~~ válido, bvq se cumplen las 2 condiciones de flujo válido:

i) $0 \le f(e) \le c(e) \ \forall e \in E$.

ii) $\forall v \in V - \{s,t\}$, se cumple la ley de conservación de flujo, es decir, $f_{in}(v) = f_{out}(v)$ donde f_{in} y f_{out} es el flujo que entra y sale del vértice resp.

Veamos que vale i: $\Leftrightarrow 0 \le f(e) \le c(e) \Leftrightarrow$

$0 \le \alpha f_1(e) + (1-\alpha) f_2(e) \le c(e)$. Ahora bien, como $0 \le f_1(e) \le c(e)$, $0 \le f_2(e) \le c(e)$ por ser ambos flujos válidos, $\Rightarrow 0 \le \alpha f_1(e) \le \alpha c(e)$, $0 \le (1-\alpha) f_2(e) \le (1-\alpha) c(e)$ y sumando ambas desig. tenemos

Deberías argumentar $\alpha \ge 0$ y $1-\alpha \ge 0$

$$0 \le \alpha f_1(e) + (1-\alpha) f_2(e) \le \alpha c(e) + (1-\alpha) c(e) = c(e).$$

Veamos que vale ii) Sea $v \in V - \{s,t\}$. Como f_1, f_2 son flujos válidos, vale que $f_1^{in}(v) = f_1^{out}(v)$, $f_2^{in}(v) = f_2^{out}(v)$ (cambiando de notación). Por lo tanto, análogamente a lo anterior $\alpha f_1^{in}(v) = \alpha f_1^{out}(v)$ ⊛ $(1-\alpha) f_2^{in}(v) = (1-\alpha) f_2^{out}(v)$ y sumando tenemos

$$\underbrace{\alpha f_1^{in}(v) + (1-\alpha) f_2^{in}(v)}_{= f_{in} \text{ x def}} = \overbrace{\alpha f_1^{out}(v) + (1-\alpha) f_2^{out}(v)}^{= f_{out} \text{ x def}} \Rightarrow$$

$f_{in}(v) = f_{out}(v) \Rightarrow f$ es ~~un~~ flujo válido.

⊛ esto pues $f_{in}(w) = \sum_{\substack{e=(v,w) \\ v \in V}} f_{in}(e) = \sum_{e=(v,w)} \alpha f_1(e) + (1-\alpha) f_2(e)$
$= \alpha f_1^{in}(w) + (1-\alpha) f_2^{in}(w) \ \forall w \in V$.

b) ~~No es cierto~~ Sí es cierto. si f_1, f_2 son flujos máximos, como la red es la misma, el flujo ~~~~

máximo en la red es único $\Rightarrow$ si f_1, f_2 son flujos máximos, necesariamente producen el mismo flujo en la red, es decir $F = f^1_{in}(t) - f^1_{out}(t)$

↳ valor del flujo x def.

$= f^2_{in}(t) - f^2_{out}(t)$. $\Rightarrow$ ~~$\alpha F + (1-\alpha)F = \alpha f^1_{in}(t) + (1-\alpha) f^2_{in}(t)$~~

$\alpha F = \alpha f^1_{in}(t) - \alpha f^1_{out}(t)$

$(1-\alpha) F = (1-\alpha)(f^2_{in}(t) - f^2_{out}(t))$

$\Rightarrow \alpha F + (1-\alpha)F = F = \alpha f^1_{in}(t) + (1-\alpha) f^2_{in}(t) - \alpha f^1_{out}(t) - (1-\alpha) f^2_{out}(t)$

$= f_{in}(t) - f_{out}(t)$. $\Rightarrow$ EL FLUJO ES EL MISMO que

por def del flujo.

para f_1, f_2 y por lo tanto es máximo

NOTA: 1,95

Jessica Sánchez

27

4) Primero veamos que $\Pi_1 \in NP$. $A \subseteq H$

Como certificado propongo el árbol generador y

el cual leer toma $O(n^2)$ con matriz de ady

representado como matriz de ady (se genera en $O(n^2)$)

y la función f del isomorfismo representada como vector de n posiciones donde $f[i] = j \Leftrightarrow$ el isomorfismo toma el nodo i de H y lo traduce al nodo j de T. Dado este certificado, debo chequear que efectivamente sea un árbol generador, lo cual puedo hacer viendo que $|V(A)| = |V(H)|$ (para ver que es generador) y que $m = n-1$ recorriendo la matriz y viendo que es conexo corriendo un BFS desde algún nodo y viendo que alcanzo a todos (análogo a lo hecho para el punto 1), estas del cosas toman tiempo polinomial (para el BFS podría hacer una copia del grafo y representarlo con lista ady y la copia toma $O(\max\{n^2, n+m\})$ y el BFS toma $O(n+m)$) $\Rightarrow$ es AG.

debo chequear que f sea iso si es mono y $|V(T)| = |V(A)|$ $O(1)$. ver si es mono se puede en n^2 viendo para cada pos. del vector que no haya otra q' valga lo mismo

~~Luego~~ A efectivamente es isomorfo a T, dado que T sabemos por hipótesis que es árbol. ~~y lo por representar el grafo con matriz~~ Esto lo hacemos chequeando que $\forall v \in A$, $\text{VECINOS}_A(v) = \text{VECINOS}_T(\overline{f(v)})$.

abuso de notación.

$\Rightarrow$ en el T y el A, no en H

Es decir, recorro ambos grafos (A y T también representado como matriz de ady $\tilde{M}$) y chequeo que

$M_{ij} = 1 \Leftrightarrow \tilde{M}_{f(i)f(j)} = 1$, lo cual puedo hacer polinomialmente con la f y recorriendo ambas matrices. $O(n^2)$

Si esto se cumple concluyo que la instancia $\in Y_{\Pi_1}$.

$\Rightarrow \Pi_1 \in NP$.

FALTÓ CHEQUEAR

$A \subseteq H$

A SUBGRAFO DE H

Ahora veq $\pi_1 \in NP\text{-}C$. La reducción que propongo es $f\left(\frac{G}{\pi_2}\right) = \pi_1(G, \underset{=T}{P_n})$ ✓ ; es decir, dado un problema de camino hamiltoniano, lo traduzco a un problema de ver si G tiene un AG isomorfo a un camino simple de n vértices. Notar que un camino simple de n vértices es un árbol, ✓ y el grafo correspondiente lo puedo generar (genero una matriz en $O(n^2)$) ✓ de forma polinomial. Como el grafo G no lo cambio, lo único que hace la función es generar P_n, y por lo tanto es polinomial. Ahora veq $\pi_2(G) \in Y_{\pi_2} \Leftrightarrow f(\pi_2(G)) \in Y_{\pi_1}$.

sii G tiene un camino hamilt, sii G ~~tiene~~ tiene

$\Rightarrow$) Veamos que si G tiene un camino hamiltoniano un AG isomorfo a P_n: Sea $v_1 \ldots v_n$ el camino hamiltoniano. ~~Por~~ Por lo tanto, $\tilde{A} = \{(v_1, v_2) \ldots (v_{n-1}, v_n)\} \subseteq E(G)$. Afirmo que $A = (V, \tilde{A})$ es el subgrafo AG isomorfo a P_n.

Notar que es subgrafo trivialmente. Es un árbol pues es obviamente conexo (tomo el camino hamilt en el orden o al revés) y tiene $n-1$ ejes. Como además contiene a todos los vértices es un AG ✓, y al ser un camino simple de n vértices es obviamente isomorfo a P_n.

¡MUY CLARO!

$\Leftarrow$) Veamos que si H tiene un ~~subgrafo~~ AG isom. a P_n, entonces es hamiltoniano: Sea A el AG isomorfo a P_n, y tomemos $\overset{\wedge}{\text{sea}}$ f el isomorfismo $w_1 \ldots w_n$ el camino en P_n. $f^{-1}(w_1) = v_1 \in \overset{\vee}{A}$, $f^{-1}(w_2) = v_2 \in \overset{\vee}{A}$ ... $\to$ y son todos $\neq$ pues f es biy. $f^{-1}(w_n) = v_n \in \overset{\vee}{A}$. Además, por ser iso, $(f^{-1}(w_i), f^{-1}(w_{i+1})) \in E(A)$ $\to$ pues $(w_i, w_{i+1}) \in E(P_n)$

Acá podés tomar $v_1 \ldots v_n$ directo

$\Rightarrow f^{-1}(w_1) f^{-1}(w_2) \ldots f^{-1}(w_n)$ es un ~~camino~~ camino hamilt. ✓ Es simple ✓ (f^{-1} biy) y pasa por todos los nodos (pues pasa por n nodos) ✓

Jessica Singer

27

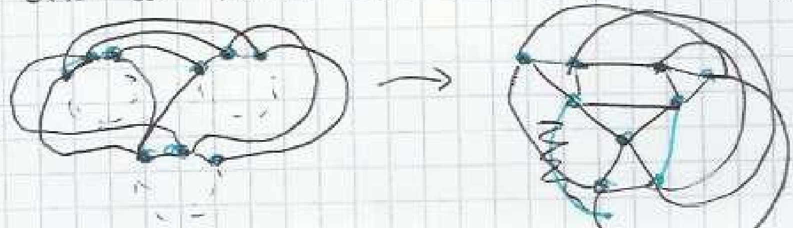
2

5a) Veamos que C^3_k no es planar.

En particular bvq C^3_3 no es planar. Esto, dado que todo C_k contiene ~~un subgrafo~~ es contraíble a C_3 (contrayendo de a uno nodos ady hasta tener C_3).

$\Rightarrow C^3_k$ contiene un subgrafo contraíble a C^3_3.

(tomo 3 nodos de una copia y sus copias con los ejes a sus copias, los otros nodos sólo con los ejes "internos" de c/copia y contraigo de a uno los nodos sin ejes a copias con los que tienen ejes a copias)



(perdón x lo desprolijo)

veamos ~~veamos~~ que C^3_3 no es planar: consideremos a C^3_3 notación como 3 copias de v_1, v_2, v_3 que forman un C_3 a las que llamo $v^i_1 v^i_2 v^i_3$ $1 \leq i \leq 3$. Consideremos la contracción de v^i_2 con sus 2 copias (da igual qué i tomo). y v^i_3 con sus copias.

~~Sup $i=1$ aunque $\forall 1 \leq i \leq 3$ va a servir.~~

$\Rightarrow$ tenemos un nuevo grafo formado por v^i_1, $\overset{\text{contracción de } v^i_1\text{s}}{v_1}$, $\overset{\text{idem}}{v_2}$ y v^i_3 $1 \leq i \leq 3$. Los v^i_3 por def de este grafo están todos unidos entre sí. v_1 y v_2 también están conectados porque v^i_1 y v^i_2 estaban conectados $\forall i$. Además como v^i_1, v^i_2 tenían ejes a v^i_3, sus contracciones v_1 y v_2 tienen ejes a v^i_3 $\forall i$

$\Rightarrow$ tenemos un K_5! Ü Son 5 nodos, todos conectan con todos. $\Rightarrow$ C_3^3 ~~tiene~~ es contraíble a K_5 $\Rightarrow$ no es planar.

como C_k^3 tiene un subgrafo contraíble a C_3^3, tiene por ende un subgrafo contraíble a K_5 $\Rightarrow$ no es planar.

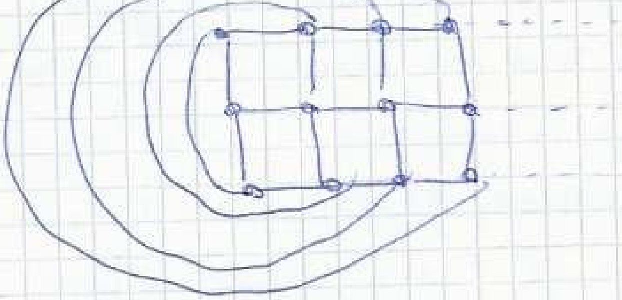
Si G grafo tiene un ciclo, tiene un subgrafo que es C_k, entonces G^3 tiene un subgrafo que es C_k^3 $\Rightarrow$ no es planar.

Jessica Singer

27

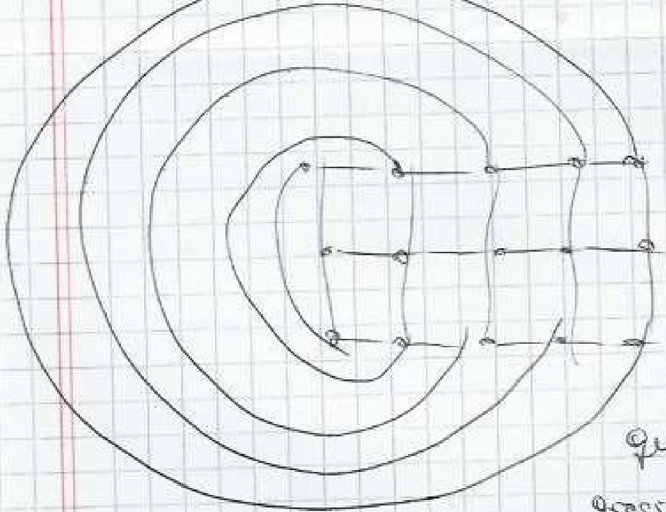
5) c) Veamos que P_k^3 es planar:

tomo la representación planar siguiente



Es decir, represento a los caminos análogamente a una cuadrícula y los uno con semicircunf cada vez más grandes.

Para $k = 5$, la rep sería



es decir la misma añadiendo una "columna" más a la rep.

Así siguiendo, tenemos que P_k^3 es planar.

gracias a que $\mathbb{R}^2$ no es acotado y siempre puedo agrandar la circunf.

5b) Veamos que $K_{1,3}^3$ no es planar. Sea $V_1 = \{v\}$, $V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ las bipartición.

Simplemente considero la contracción de v_1^i en 1 $\forall\, 1 \leq i \leq 3$, v_2^i y v_3^i resp.

Es decir, contraigo las 3 particiones de 3 en 1.

Llamando v^i al otro nodo de cada copia de cada bipartición, v^i siempre es adyacente a v_1^i, v_2^i, v_3^i, como además los contraje, los nuevos v_1, v_2, v_3 serán adyacentes a v^i $\forall\, 1 \leq i \leq 3$, y por lo tanto tengo que el grafo tiene un subgrafo contraíble a $K_{3,3}$ y por lo tanto no es planar. El subgrafo será el mismo sin los ejes que unen a los v^i.

Ahora bien, dado G con $\Delta(G) \geq 3$, por def $\exists\, v \,/\, d(v) \geq 3$ $\Rightarrow$ tomando a v y a 3 de sus adys tenemos un subgrafo que es $K_{3,1}$, luego en G^3 hay un subgrafo que es $K_{3,1}^3$ el cual vimos que no era planar $\Rightarrow G^3$ tampoco lo es.

Jessica Singer

27

5d) $\Leftarrow$) Vale por item c) y porque si cada comp. conexa de un grafo es planar, el grafo es planar.

$\Rightarrow$) Como G^3 es planar, sabemos que G no contiene ciclos simples (por item a), y que $\Delta(G)\leq 2$, (por item b). Por lo tanto tenemos un grafo con todos vértices v / $d(v)\leq 2$ y sin circuitos.

Si $d(v)\leq 2$ $\forall v\in V$, necesariamente cada comp. conexa ~~es un circuito~~ además de ser un árbol (lo cual es trivial pues no tiene circuitos y x def cada cc es conexo), afirmo que debe ser un camino simple:

~~como el árbol tiene al menos 2 hojas, hay 2 nodos de gr 1. Notar que no puede haber más,~~

~~pues como todo vértice tiene gr 2~~

Consideremos el camino máx dentro del árbol y afirmo que contiene a todos los nodos.

Si los contiene, el camino tiene $n-1$ aristas $\Rightarrow$ el árbol es P_n.

Sup. que no contiene a todos. Sea $v_1 \dots v_r$ el camino y v un vértice que no está.

Por conexión $\exists$ camino de v a v_1, y como $v_2 \dots v_{r-1}$ ya tienen el mayor grado que podían tener no puede ~~[illegible]~~ pasar por esos vértices.

Además tampoco puede pasar por v_1 pues así tendría 2 caminos simples $\neq$ $\Rightarrow$ habría un circuito $\Rightarrow$ sea $P = v \dots v_r$ el camino hasta v_r, utiliza todos nodos que no están en el camino

$\Rightarrow$ Puedo extender el camino a $v_1 \dots v_r \dots v$.

Abs! Concluyo que cada c.c es un camino simple.